Freiarbeit
„Lineare Funktionen“

	Block	Inhalt / Schwerpunkte
Einstieg für die ganze Klasse	A	Zuordnungen – Grundlagen, Begriffe, „Was ist eine *Funktion*?“
Pflichtthemen für die Erarbeitung in den Gruppen (Theorieteil)	B C D E F G H	Funktionsklassen Lineare Funktionen Bedeutung der Parameter m und n Das Steigungsdreieck Achsenschnittpunkte Schnittpunkte zweier Graphen Aufstellen der Funktionsgleichung
Pflichtthemen zur Übung in den Gruppen	Ü S	Übungen Sachaufgaben
Beleghausaufgaben	HA_i	Drei Aufgabenblöcke zu allen Themen
Zusatz	X_i Z_i **Spiel**	Erweiterungsthemen (X_1 im Heft, X_2 – X_4 auf Nachfrage) zusätzliche Grundübungen

Aufgabe: **Lies** die Texte in den einzelnen Kapiteln **sorgfältig**. Wende dafür bewusst Lesestrategien (siehe „Lesezeichen!“) an.

Die **Erledigung der** zugehörigen **Übungsaufgaben** gehört zu den Pflichten. Ihr könnt Euch dabei gegenseitig unterstützen, aber bitte nicht abschreiben, das bringt letztendlich gar nichts. Die Lösungen sind auf entsprechendem Papier sauber zu **dokumentieren**. An Stellen mit dem Zeichen „✍“ kannst Du direkt auf das Arbeitsblatt schreiben, es ist Platz dafür vorgesehen (______).

Verständigt Euch untereinander am Ende jeder Unterrichtsstunde, welche Aufgaben ihr zu Hause beendet. Ohne diese **häusliche Arbeit** könnte es schwer werden, alles zu schaffen.

Hausaufgaben: Zusätzlich zur üblichen häuslichen Arbeit müssen **drei Beleghausaufgaben** abgegeben werden. Die **Termine** dafür werden zu Beginn der Freiarbeit genannt und ggf. während der Arbeit aktualisiert.

Bewertung: Es werden schriftliche Kontrollen geschrieben.

Die Arbeit im Unterricht wird bewertet. Der Lehrer/die Lehrerin schätzt dazu Deine Bemühungen ein, nimmt Deine Aufzeichnungen in Augenschein und wird das eine oder andere Gespräch in der Gruppe führen. Außerdem werden Deine Gruppenmitglieder Dich einschätzen.

A „Zuordnungen“ (Grundlagen und Begriffe)

☞ ***Erfülle zuerst die Leseaufgabe 1 (siehe „Lesezeichen!“).***

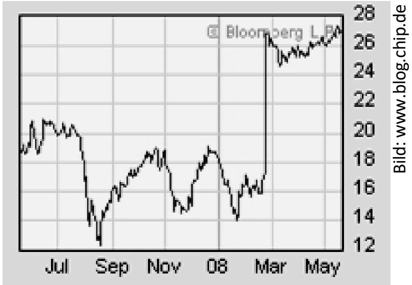


Abb.1: Aktienkurs der Firma „TakeTwo“

Zuordnungen sind keine rein mathematischen Erfindungen sondern Teil unseres Alltags. Jedem Menschen wird ein Name zugeordnet, jedem zugelassenen Auto ein Kennzeichen, jedem Topf ein Deckel, jeder Region eine Jahresdurchschnittstemperatur …. Alle diese Zuordnungen erfüllen ihren Zweck, einige lassen sich mit Gesetzmäßigkeiten beschreiben. Z. B.: *Je weiter man nach Süden reist, desto höher ist die Jahresdurchschnittstemperatur (ausgehend vom Nordpol bis zum Äquator)*.

Mathematiker sind bemüht, Zuordnungen mit Hilfe von Gleichungen und Graphen zu beschreiben. Wenn dies gelingt, dann sind Voraussagen möglich. Das wird genutzt bei der Berechnung von Versicherungsbeiträgen oder für die Wettervorhersage. Wem es gelänge, Aktienkurse vorauszuberechnen, der könnte sicher reich werden.

Um sich über Zuordnungen verständigen zu können, ist es wichtig, Begriffe und Darstellungsformen zu kennen. In den nachfolgenden drei Kapiteln werden wichtige Grundlagen beschrieben. Lies die Texte unter Verwendung von Lesestrategien (siehe „Lesezeichen!“).

1. Grundbegriffe

Definitionsbereich: Das ist die Menge aller Elemente (Dinge, Objekte), für die eine Zuordnung festgelegt (definiert) ist; z.B.: *Alle deutschen Staatsbürger, denen ein Vorname zugeteilt wird*.

Wertebereich: Das ist die Menge aller Elemente (Werte), die für die Zuordnung zur Definitionsmenge zur Verfügung stehen; z.B.: *Alle in Deutschland zugelassenen Vornamen*.

Eindeutigkeit: Eine Zuordnung heißt ***eindeutig***, wenn jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zugeordnet wird.
Beispiel: *Jedem Kind wird genau ein Vorname (Rufname) zugeordnet.*

Können Elementen des Definitionsbereiches mehrere Elemente des Wertebereiches zugeordnet werden, so ist die Zuordnung ***nicht eindeutig***.
Beispiel: *Jedem Vitamin wird eine Obstsorte zugeordnet, in der es enthalten ist. (Da z.B. Vitamin C in Orangen, Äpfeln u.v.a. enthalten ist, ist diese Zuordnung nicht eindeutig.)*

Eine Zuordnung kann sogar ***eineindeutig*** sein. Das bedeutet, jedem Element aus dem Definitionsbereich wird ein Element aus dem Wertebereich zugeordnet und umgekehrt.

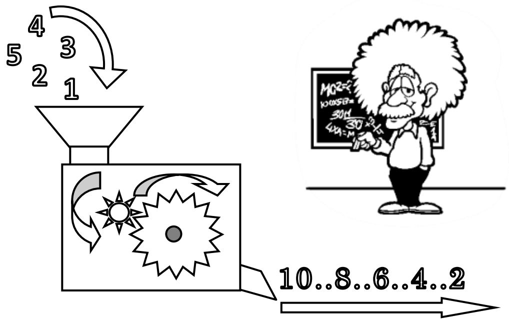
Beispiel: *Jedem zugelassenen Pkw wird ein Kfz-Kennzeichen zugeordnet.*

☞ ***Erfülle die Leseaufgabe 2 (siehe „Lesezeichen!“).***

☞ ***Erfülle die Leseaufgabe 3 (siehe „Lesezeichen!“).***

2. Funktionen

Eine eindeutige Zuordnung nennt man ***Funktion***. Dabei wird jedem Element aus einer Menge A genau ein Element der Menge B zugeordnet.



Das Teilgebiet der Mathematik, zu dem das Thema „Lineare Funktionen“ gehört, heißt ***Analysis***. Hier bestehen die Mengen A und B aus Zahlen.

Eine Funktion kann man sich wie eine funktionierende Apparatur vorstellen, in die Zahlen hineingegeben werden und andere Zahlen ausgegeben werden.

Um Funktionen zu beschreiben, werden bestimmte Begriffe und Symbole benutzt. Da Funktionen Zuordnungen sind, gelten auch hier die Begriffe ***Definitions- und Wertebereich*** (siehe 1.)

Die Elemente (Zahlen) des Definitionsbereiches heißen ***Argumente*** oder auch ***x-Werte.***
Die Elemente (Zahlen) des Wertebereiches heißen ***Funktionswerte*** oder auch ***y-Werte***.
Der Funktion selbst wird oft ein Name (in Form eines Buchstaben) zugeteilt, z.B. „die Funktion ***f*** “.

Kann eine Funktion durch einen Term ausgedrückt werden, so sind drei ***Schreibweisen*** üblich.

a) ***f***: x → 2·x+1	***f***:	x	→	2·x+1
(Das liest man so:	Funktion ***f***:	Jedem Argument x,	wird zugeordnet,	das Doppelte von x plus 1.)

b) f(x) = 2·x + 1 Lies: f von x (Funktion von x) ist gleich das Doppelte von x vermehrt um 1.
c) ***f***: y = 2·x + 1 Diese Schreibweise heißt auch Koordinatengleichung der Funktion ***f***.
Die Schreibweisen b) und c) sind am gebräuchlichsten.

☞ **Lies dazu auch: LB., S. 84, „farbiger Kasten“.**

Zur Beschreibung des Definitionsbereiches und des Wertebereiches ist folgende Symbolik üblich:
Definitionsbereich: $D_f = \{ x \mid x \in Z \}$
Lies: Definitionsbereich von f sind alle x-Werte für die gilt: x ist Element der ganzen Zahlen.

oder z.B.: $D_g = \{ x \mid 0 < x < 10 \}$
Lies: Definitionsbereich von g sind alle x-Werte, die zwischen 0 und 10 liegen.
Hier wird „stillschweigend“ angenommen, dass der fragliche Zahlenbereich die rationalen Zahlen (Q) sind, da keine weiteren Angaben vorhanden sind.

Will man ausdrücken, dass ein Definitionsbereich einer Funktion namens „h“ aus allen *ganzen Zahlen* zwischen –10 und 10 besteht, wobei –10 und 10 mit dazu gehören sollen, sähe das so aus: $D_h = \{ x \mid -10 \le x \le 10,\ x \in Z \}$

Wertebereich: $W_f = \{ y \mid y \in Z \}$ oder z.B.: $W_g = \{ y \mid 0 \le y \le 12 \}$
Der Wertebereich wird also genau wie der Definitionsbereich beschrieben, nur mit anderen Buchstaben.

☞ ***Erfülle die Leseaufgabe 4 (siehe „Lesezeichen!“).***

3. Darstellungsformen

Neben den o.g. Funktionsgleichungen bzw. –termen gibt es noch andere Möglichkeiten eine Funktion zu beschreiben.

a) Menge geordneter Paare (Wertepaare)

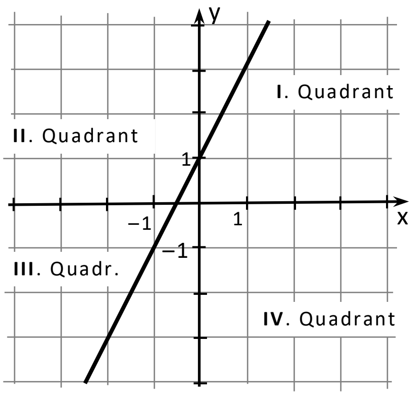
Hierbei wird eine Auswahl von Argumenten und zugehörigen Funktionswerten als Klammerausdruck (x|y) angegeben. Die Schreibweise entspricht der bekannten Angabe von Koordinaten in einem Koordinatensystem, z.B.: (1|3), (2|5), (3|7), …. (22|45), …

b) Wertetabelle

Auch hier wird eine Auswahl von Argumenten und zugehörigen Funktionswerten angegeben, jedoch in Form einer Tabelle. Das Beispiel aus a) sieht dann so aus:

x	1	2	3	…	22	…
y	3	5	7	…	45	…

c) Graph (Schaubild) in einem Koordinatensystem



Überträgt man die Wertepaare in ein Koordinatensystem und verbindet die Punkte (nur dann verbinden, wenn Definitions- und Wertebereich Q ist), so entsteht der ***Graph*** der Funktion.

Andere Namen: *Bild der Funktion*, *Schaubild, Graphische Darstellung*, *Funktionskurve*.

Der Graph zeigt immer nur einen begrenzten Ausschnitt der Funktion. Das Intervall, in dem ein Graph dargestellt werden soll, wird folgendermaßen beschrieben:
$\mathbf{x_1 \le x \le x_2}$ (wobei x_1 und x_2 feste Zahlen sind).

Beispiel: $-3 \le x \le 6$ (Bedeutet, dass der Graph zwischen x = –3 und x = 6 dargestellt wird.)

d) Pfeildiagramm

Eine eher selten benutzte Variante der Darstellung sind Pfeildiagramme.
Beispiele dafür findest du im LB., S.100,Aufgabe 9.

e) Wortvorschrift

Jeder Funktionsterm lässt sich auch durch Worte ausdrücken. Das findet sich immer in Sachaufgaben. Beispiele findest du im LB., S. 83, Aufgabe 3 .

4. Teste Dich selbst:

Wenn du alles verstanden hast, dann sollte dir die Erledigung der nachfolgenden Aufgaben gut gelingen. Nutze dazu ***deine Übersicht (!)*** und die Texte in Kapitel A.

A1 a) Begründe, warum die Zuordnung *„Jedem Kind wird ein (Ruf-)Name zugeteilt.“*, zwar ***eindeutig*** aber **nicht *eineindeutig*** ist.

b) Begründe, warum die Zuordnung *„Jedem zugelassenen Pkw wird ein Kfz-Kennzeichen zugeordnet.“*, ***eineindeutig*** ist.

c) LB., S. 85, Nr. 1

d) LB., S. 85, Nr. 3

A2 Beschreibe folgendes durch die entsprechende Symbolik:

a) „Der Definitionsbereich der Funktion k sind alle rationalen Zahlen von –5 bis 5.“

✎ --

b) „Der Wertebereich der Funktion b sind natürliche Zahlen unter 100.“

✎ --

Was bedeuten die folgenden Angaben?

c) $W_g = \{ y \mid y \in Q_+ \}$ ✎ --

----

d) $D_f = \{ x \mid -10 \leq x \leq 10, x \in Z \}$ ✎ --

A3 Von einer Funktion h ist folgendes bekannt: $D_h = \{x \mid -12 < x < 2, x \in Z\}$, $W_h = \{y \mid y < 20, y \in N\}$.

a) Gib zwei mögliche Funktionswerte von ***h*** an: ✎ ------------------------------

b) Gib zwei mögliche Argumente von ***h*** an: ✎ ------------------------------

c) Gib eine Zahl an, die kein Argument von ***h*** sein kann: ✎ ------------------------

d) Gib eine Zahl an, die kein Funktionswert von ***h*** sein kann: ✎ ----------------------

e) Gib eine Zahl an, die zwar Argument, aber nicht Funktionswert von ***h*** sein könnte: ✎ ------

f) Gib eine Zahl an, die sowohl Argument, als auch Funktionswert von ***h*** sein könnte: ✎ ------

A4 f: „Die Zahl y ergibt sich aus der Zahl x, indem diese halbiert und dann um 3 vermehrt wird.“
$D_f = \{x \mid x \in Q\}$

a) Gib zu dieser Wortvorschrift eine Gleichung an.

b) Gib drei Wertepaare dazu an.

c) Erstelle eine Wertetabelle mit mindestens 8 Argumenten für das Intervall $-6 \leq x \leq 10$.

d) Zeichne den Graphen im o.g. Intervall.

e) Bestimme den Funktionswert für das Argument 20.

f) Stelle eine Gleichung auf, um das Argument für den Funktionswert 24 zu bestimmen und löse sie.

B Funktionsarten

Viele der verschiedenen mathematischen Zuordnungen bzw. Funktionen lassen sich in Gruppen einteilen. Nachdem du in diesem Kapitel einen kleinen Einblick erhalten wirst, werden wir uns im Rest dieser Freiarbeit dann nur noch mit der Gruppe der „Linearen Funktionen“ beschäftigen.

1. Die direkte Proportionalität

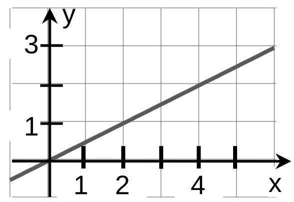
Diese eindeutige Zuordnung kennst du bereits aus der Grundschule. Kurze Zusammenfassung:

Die Gleichung lautet immer $y = k \cdot x$, wobei k eine feste Zahl ist und Proportionalitätsfaktor genannt wird. k lässt sich einfach bestimmen, indem man ein beliebiges Wertepaar (x|y) nimmt und $y : x = k$ rechnet.

Der Graph einer direkten Proportionalität ist immer eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht.

Beispiel: $y = 0{,}5 \cdot x$

x	0	1	2	4	6
y	0	0,5	1	2	3



Übung – B1

Herr Priem kauft bei einem Bauern 4 kg Kartoffeln für 5,20 €.
Zwei Wochen später kauft er dort 7 kg für 9,10 €.

a) Zeige, dass zwischen den Wertepaaren direkte Proportionalität herrscht und gib die entsprechende Funktionsgleichung an.

b) Lege eine Wertetabelle mit mindestens 6 Wertepaaren im Intervall 0 kg ≤ x ≤ 12 kg an und zeichne den Graphen der Zuordnung.

2. Indirekte (umgekehrte) Proportionalität

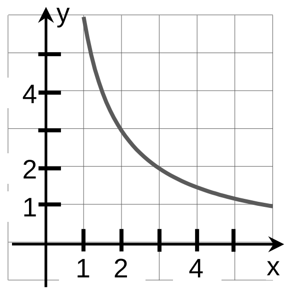
Kennzeichen dieser Zuordnung, die du ebenfalls bereits kennen müsstest, ist die Produktgleichheit aller Wertepaare. Für alle Wertepaare gilt: $x \cdot y = k$. Im nebenstehenden Beispiel kannst du diesen Zusammenhang durch Kopfrechnen prüfen.

Aus dieser Gesetzmäßigkeit ergibt sich die Funktionsgleichung: $y = \frac{k}{x}$, wobei auch hier k eine feste Zahl ist. ☞ *Im Beispiel ist k = 6.*

Der Graph ist keine Gerade sondern eine Hyperbel. Diese verläuft nicht durch den Koordinatenursprung, sie schneidet auch keine der Koordinatenachsen.

Beispiel: $y = \frac{6}{x}$

x	0	1	2	4	6
y	-	6	3	1,5	1



Übung – B2

a) Lege zu dem gegebenen Beispiel eine größere Wertetabelle mit 15 Wertepaaren im Intervall $-12 \le x \le 12$ an. Die vorhandenen Wertepaare aus dem Beispiel können übernommen werden.

b) Zeichne den Graphen in diesem Intervall, beachte dass er aus zwei Teilen besteht.

c) Durch welche Quadranten verläuft der Graph nicht?

3. Quadratische Funktionen

Mit dieser Funktionsklasse wirst du Dich im nächsten Schuljahr intensiver beschäftigen. Durch Erledigung der nachfolgenden Übungen erhältst du einen kleinen Einblick in diese Thematik.

Übung – B3

a) ***f***: $y = x^2$. Lege eine Wertetabelle mit mindestens 9 Wertepaaren im Intervall $-3 \le x \le 3$ an und zeichne den Graphen der Funktion *f*.

b) ***g***: $y = 0{,}5 \cdot x^2 - 2$. Lege eine Wertetabelle mit mindestens 9 Wertepaaren im Intervall $-4 \le x \le 4$ an und zeichne den Graphen der Funktion ***g***.
Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse, Punkt C ist der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse. Gib die Koordinaten von A, B und C an.

c) Begründe, warum die Funktionen ***f*** und ***g*** nicht ***eineindeutig*** sind.

C Lineare Funktionen

C1 – Einstiegsaufgabe:

Miriam hat eine kleine Studentenwohnung. Monatlich zahlt sie ihre Stromkosten. Der Energieversorger berechnet ihr jeden Monat eine Grundgebühr von 4,50 € für das Bereitstellen des Anschlusses und außerdem für jede verbrauchte Kilowattstunde (kWh) 0,22 €.

- Stelle eine Gleichung auf, mit der man den zu zahlenden Endpreis (y) abhängig vom monatlichen Verbrauch (x) unter Berücksichtigung der Grundgebühr berechnen kann.
- Erstelle eine Wertetabelle der Stromkosten für mögliche monatliche Verbräuche zwischen 0 und 50 kWh. Zeichne den Graphen der Zuordnung in ein Koordinatensystem.

Definition: Eine Funktion ***f*** mit der Gleichung f(x) = m·x + n (bzw. **y = m·x + n**), bei der m (m≠0) und n feste Zahlen sind, heißt **lineare Funktion**.

Die Einstiegsaufgabe C1 ist ein Beispiel für eine solche lineare Funktion.

C2 – Erkundungsaufgabe

Erstelle ein Koordinatensystem nach folgenden Vorgaben: $-4 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 7$.
Die folgenden vier Funktionen sind durchnummeriert von f_1 bis f_4. Lege für jede eine Wertetabelle an und zeichne alle vier Graphen in das Koordinatensystem. Beschrifte die Graphen mit den Funktionsnamen (f_1, f_2, …). Berechne für jeden Graphen nur so viele Wertepaare, wie du zum Zeichnen benötigst.

f_1: $y = 2\cdot x - 3$; $f_2(x) = \frac{1}{2}\cdot x + 2$ $f_3(x) = -2\cdot x + 5$ f_4: $y = 1{,}5\cdot x + 0$

Welche Gemeinsamkeit haben alle vier Graphen?

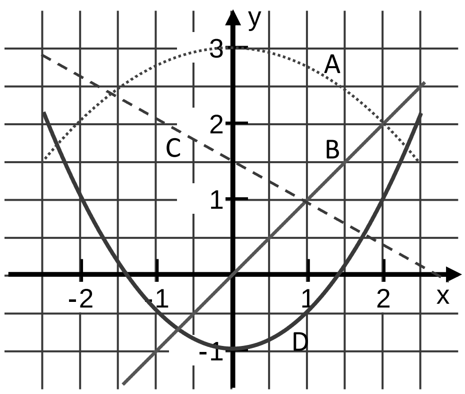
C3 – Kurze Zusammenfassung: ✍ Ergänze den Lückentext.

Jede lineare Funktion hat eine Funktionsgleichung der

Form __________________________________ .

Graphen von linearen Funktionen sind stets

_________________________.



Übungsaufgaben

C4 Kreuze bei den folgenden Gleichungen die an, die zu einer linearen Funktion gehören:

- ☐ a) $y = 10\cdot x + 5$
- ☐ b) $y = 10 : x + 3$
- ☐ c) $y = 6 + 3x$
- ☐ d) $y = 10 - 5x$
- ☐ e) $y = 4\cdot x^2 + 2$
- ☐ f) $y = x : 2 + 1$

C5 Welche der obigen Graphen (A, B, C, D) gehören zu linearen Funktionen? ______________

Punktprobe

Um zu überprüfen, ob ein Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt, setzt man die x-Koordinate des Punktes in die Funktionsgleichung ein, rechnet den Funktionswert aus und vergleicht mit der y-Koordinate des gegebenen Punktes P.

Beispiel: Liegen $P_1(\mathbf{2}|3)$ oder $P_2(\mathbf{6}|-5)$ auf dem Graphen der Funktion ***f***: $y = -2{,}5\cdot x + 8$?

P_1: $y = -2{,}5\cdot\mathbf{2} + 8$
$y = 3 \rightarrow P_1$ liegt auf ***f***.

P_2: $y = -2{,}5\cdot\mathbf{6} + 8$
$y = -7 \rightarrow$ stimmt nicht ($y_2 = -5$)
$\rightarrow P_2$ liegt nicht auf ***f***.

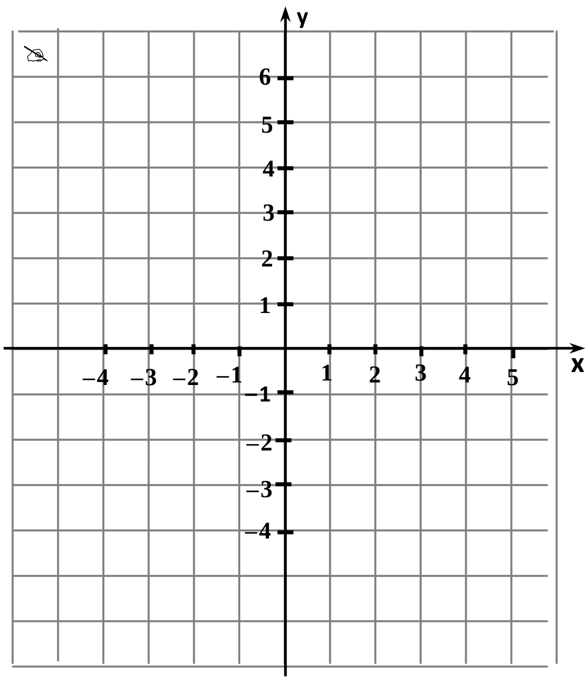
C6 Prüfe ob die Punkte A(–2|0), B(–1|5) oder C(2|2) auf den Graphen von ***f*** oder ***g*** liegen, wenn ***f***: $y = \frac{1}{2}\cdot x + 1$ und ***g***: $y = -x + 4$.

D Bedeutung der Parameter m und n

Im Kapitel C hast du erfahren, dass jede lineare Funktion durch eine Funktionsgleichung der Form $y = m \cdot x + n$ darstellbar ist, wobei **m** und **n** beliebige, aber feste Zahlen sind. Solche beliebigen, aber festen Zahlen nennt man **Parameter**. Der Buchstabe x hingegen ist kein Parameter, sondern eine Variable. Diese steht stellvertretend für alle möglichen Elemente (Argumente) des Definitionsbereiches. y ist auch eine Variable und steht stellvertretend für alle Elemente des Wertebereiches. Egal welche Werte man für m oder n einsetzt, der Graph der Funktion wird immer eine Gerade sein. Die Frage dieses Kapitels ist: „Welchen Einfluss haben die Parameter m und n auf den Verlauf der Geraden?“

Zuerst wird der Einfluss des Summanden **n** untersucht. In der nächsten Aufgabe ist der Faktor m bei allen Funktionen gleich. Die verschiedenen Summanden n verursachen unterschiedliche Geradenverläufe. Welchen Einfluss n auf den Verlauf hat, das kannst Du einfach selbst herausfinden.

D1 Bestimme zu den nachfolgenden Funktionen mindestens je zwei Wertepaare und zeichne die Graphen in das gegebene Koordinatensystem.



f₁: $y = 0{,}5 \cdot x + 4$

x			
y			

f₂: $y = 0{,}5 \cdot x + 2$

x			
y			

f₃: $y = 0{,}5 \cdot x$

x			
y			

f₄: $y = 0{,}5 \cdot x - 3$

x			
y			

Auswertung: „Der Parameter **n** bestimmt, ____

____

Lies dazu auch den farbigen Kasten im LB., S. 82

Nun soll untersucht werden, welchen Einfluss der Parameter **m** hat, der als Faktor vor der Variablen steht. In der folgenden Aufgabe ist der Parameter n immer n = 1. Die unterschiedlichen Faktoren **m** verursachen wieder unterschiedliche Geradenverläufe.

D2 Lege Dir wie in Aufgabe D1 kleine Wertetabellen und ein passendes Koordinatensystem an, um die Graphen der folgenden Funktionen zu zeichnen. Lies **m** aus den Gleichungen ab.(…)

f_5: $y = 3 \cdot x + 1$, $m_5 = 3$ f_6: $y = 2 \cdot x + 1$, $m_6 =$ ____ f_7: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$, $m_7 =$ ____

f_8: $y = -x + 1$, $m_8 =$ ____ f_9: $y = -2 \cdot x + 1$, $m_9 =$ ____

Auswertung: „Der Parameter **m** bestimmt, ____

____

Gesamtauswertung:

Bei der Lösung der Aufgaben D1 und D2 wurde folgendes ersichtlich:

- Der Parameter **n** bestimmt, an welcher Stelle die Gerade die y-Achse schneidet. Es ist immer der Punkt (0|**n**). Deshalb nennt man den Summanden **n** auch **y-Achsenabschnitt.**
- Der Parameter **m** bestimmt, wie steil der Graph verläuft und ob er steigt oder fällt. Deshalb nennt man den Faktor **m** auch **Anstieg** oder **Steigung** der Funktion.

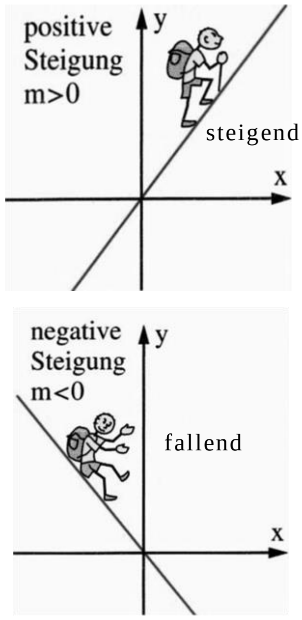


Abb.2: „Steigungen“

Die Begriffe **steigende** und **fallende** Graphen sind neu.
Ein Graph, der in „Leserichtung“ aufwärts verläuft, heißt monoton steigend.
Ein Graph, der in „Leserichtung“ abwärts verläuft, heißt monoton fallend.

Bei linearen Funktionen (y = m·x + n) gilt:

– wenn m > 0, dann steigt der Graph,
– wenn m < 0, dann fällt der Graph,
– je größer |m| (lies: Betrag von m) desto steiler verläuft der Graph.

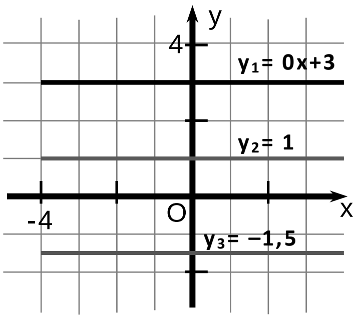


Abb.3: konstante Funktionen

Wenn m = 0 ist, dann sähe die Funktionsgleichung so aus:

y = 0·x + n bzw. y = n. Solche Funktionen sind keine linearen Funktionen, sondern heißen ***konstante Funktionen.*** Sie haben keinen Anstieg und verlaufen parallel zur x-Achse. Beispiele siehst Du in Abb.3.

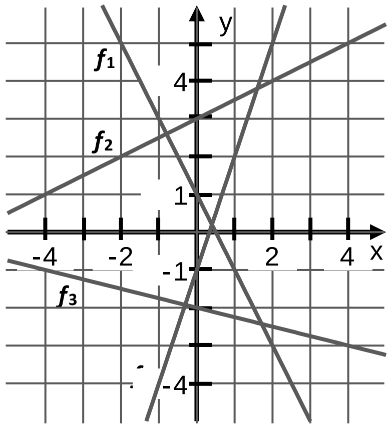
D3 „Graphen erkennen“

In dem nebenstehenden Koordinatensystem sind vier Graphen dargestellt.

Ihre Anstiege sind $m = -\frac{1}{4}$; $m = \frac{1}{2}$; m = –2 oder m = 3.

Die Schnittpunkte mit der y-Achse kannst Du selbst ablesen, sie sind ganzzahlig.

Gib die Funktionsgleichungen zu diesen Graphen an.



f_1: y = _________________ f_2: ____________________

f_3: ____________________ f_4: ____________________

D4 „Graphen beschreiben“

Gegeben sind sechs Funktionen: g_1: $y = \frac{1}{5}x + 2$; g_2: y = –0,1·x + 8 g_3: y = 1,5·x

g_4: y = –3·x + 1 ; g_5: y = 2·x – 5. g_6: y = –4

a) Die Graphen welcher Funktionen sind monoton steigend? ______________________

b) Welcher Graph ist der steilste? ____________________

c) Welche Funktion ist eine direkte Proportionalität? ____________________

d) Welche Funktion ist eine konstante Funktion? ____________________

e) Gib zu allen Funktionen den Schnittpunkt mit der y-Achse an. g_1: P_y(… | …); g_2: _______

____

f) Durch welche Quadranten verläuft der Graph der Funktion g_5? ____________________

E Das Steigungsdreieck

Da der Graph einer linearen Funktion $y = m \cdot x + n$ immer eine Gerade ist, ist das Zeichnen sehr einfach. Man benötigt nur zwei Punkte und zeichnet dadurch die Gerade. Einer der Punkte lässt sich direkt aus der Gleichung ablesen, es ist der Punkt $P_y(0|n)$, der auf der y-Achse liegt.
Den anderen Punkt $P(x|y)$ errechnet man, indem man für x eine Zahl einsetzt und den zugehörigen y-Wert mit der Gleichung berechnet.

Doch was ist, wenn der Graph vorhanden ist und die Gleichung bestimmt werden soll?

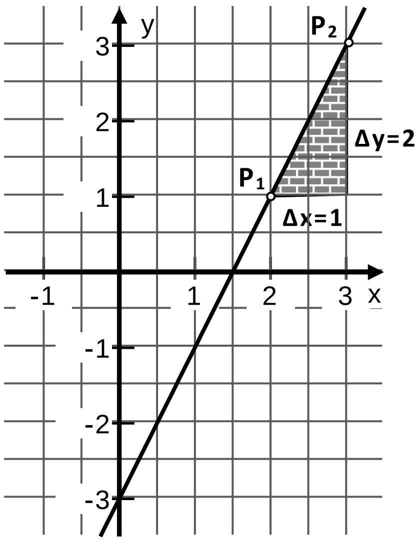
Die Struktur der Gleichung ist klar: $y = m \cdot x + n$.

n kann man bestimmen, indem man den Schnittpunkt mit der y-Achse abliest: $\mathbf{P_y(0|n)}$.

Der Anstieg **m** wird mit dem **Steigungsdreieck** ermittelt. Wie das geht, wird in diesem Kapitel erklärt.

1. Bestimmung des Anstieges m mit dem Steigungsdreieck

Erstes Beispiel:



- Man wählt zwei beliebige Punkt P_1 und P_2.
- Zwischen diesen wird ein rechtwinkliges Dreieck aufgespannt, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen sind.
- Die Länge der Kathete in x-Richtung wird abgelesen (hier $\Delta x=1$).
- Die Länge der Kathete in y-Richtung wird abgelesen (hier $\Delta y=2$).
- Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Anstieg m.

  (hier $m = \frac{2}{1} = 2$)

Da der Schnittpunkt mit der y-Achse $P(0|-3)$ ist, steht auch $n = -3$ fest.
→ Also lautet die Gleichung zu diesem Graphen: $y = 2x - 3$.

Zweites Beispiel:

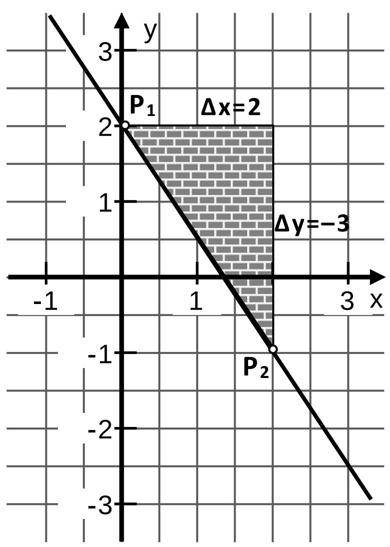
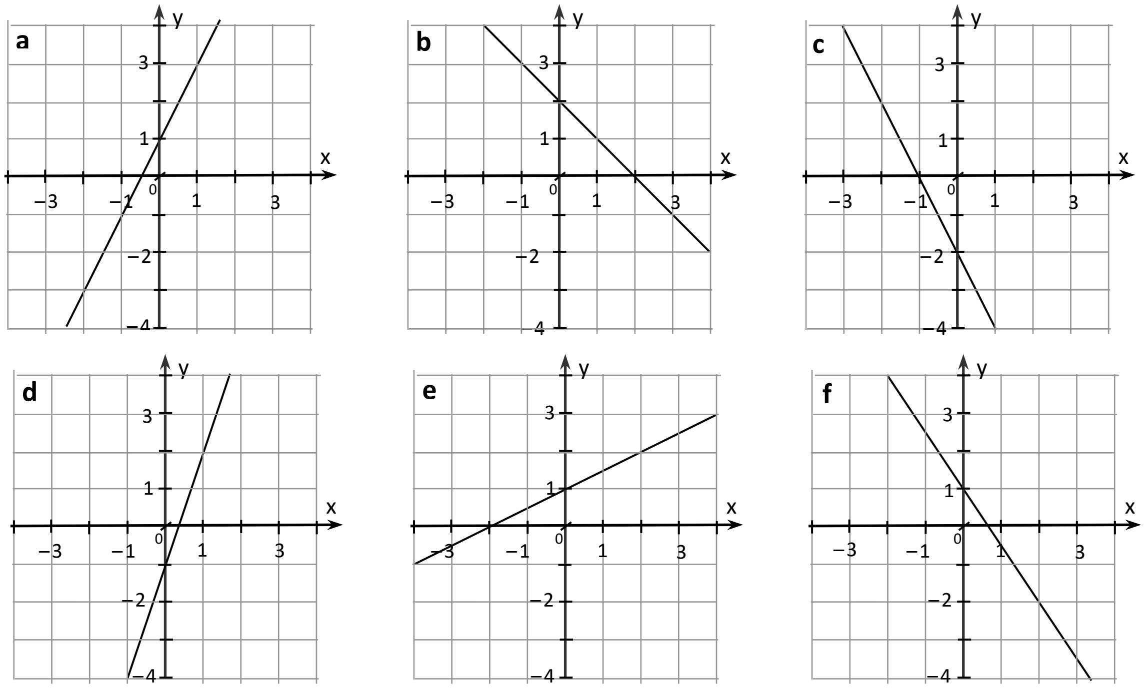


Abb.4: Steigungsdreiecke

- In diesem Beispiel wird als P_1 der Punkt $P(0|n)$ auf der y-Achse gewählt.
- $\Delta x = 2$.
- $\Delta y = -3$. -3 deshalb, weil 3 Schritte nach **unten** gezählt werden, also in negativer y-Richtung.
- $m = \frac{-3}{2} \rightarrow m = -\frac{3}{2}$ oder $m = -1{,}5$
- Mit $P(0|2)$ ergibt sich $n = 2$.
- Die Funktionsgleichung lautet also: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

  oder: $y = -1{,}5 \cdot x + 2$.

Übung E1: Lies aus den Zeichnungen die Anstiege m und die y-Achsenabschnitte n ab. Wie lauten die zugehörigen Funktionsgleichungen?



a) m = , n = ; y = … ·x + … ______________________

b) ______________________

c) ______________________

d) ______________________

e) ______________________

f) ______________________

2. Zeichnen des Graphen mit dem Steigungsdreieck

Mit dem Steigungsdreieck kann man den Graphen einer linearen Funktion auch zeichnen, wenn ihre Gleichung ($y = m \cdot x + n$) gegeben ist.

- Der erste Punkt ist $P_y(0|n)$.
- 1. Fall: Wenn **m** ganzzahlig ist, geht man von $P_y(0|n)$ 1 Einheit nach rechts und dann **m** Einheiten nach oben, wenn **m** positiv ist, bzw. nach unten, wenn **m** negativ ist. Dadurch ermittelt man einen zweiten Punkt durch den die Gerade verläuft.
- 2. Fall: Wenn **m** ein Bruch ist, also **m** = $\frac{p}{q}$, dann geht man von $P_y(0|n)$ q Einheiten nach rechts und p Einheiten nach oben , wenn **m** positiv, bzw. nach unten, wenn **m** negativ. Wieder ist die so gefundene Stelle der zweite Punkt, durch den die Gerade gezeichnet wird.
- 3. Fall: Wenn m eine Dezimalzahl ist, so muss man diese in den entsprechenden Bruch verwandeln und man verfährt wie im 2. Fall.

Beispiel: ***f***: $y = \frac{2}{3} \cdot x - 4$

$P_y(0|-4)$, ↑ 2 Schritte nach oben

$m = \frac{2}{3}$

→ 3 Schritte nach rechts

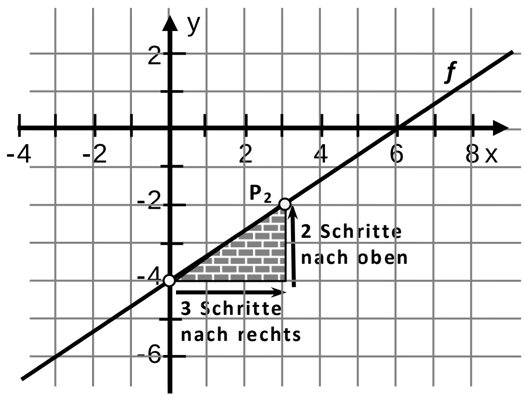


Abb.5: Steigungsdreieck

Übung E2

Zeichne mit Hilfe des Steigungsdreieckes die Graphen der folgenden Funktionen:

f₁: $y = 2 \cdot x + 3$ ***f₂***: $y = -3 \cdot x + 6$ ***f₃***: $y = \frac{3}{4} \cdot x - 2$ ***f₄***: $y = -0{,}4 \cdot x + 1$

F Die Achsenschnittpunkte

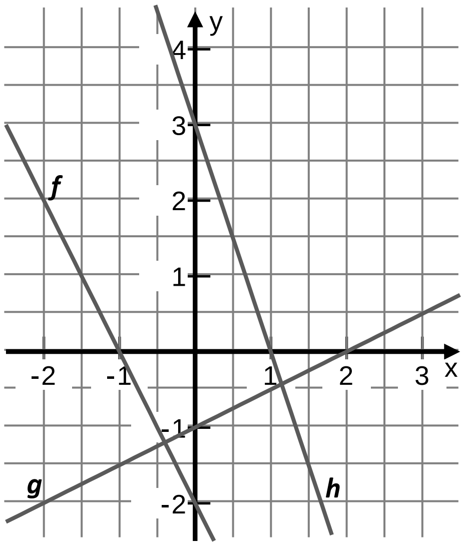


Abb.6: Graphen zur Übung **F1**

Die Punkte, in denen ein Funktionsgraph die Achsen des Koordinatensystems schneidet, gehören zu den markanten Punkten jedes Graphen (vgl. Übung B3.b). Bei den linearen Funktionen sind sie mit einfachen Mitteln bestimmbar.

Der **Schnittpunkt mit der y-Achse** ist bereits aus Aufgabe D1 bekannt. Bei einer linearen Funktion $y = m \cdot x + n$ ist der Schnittpunkt mit der y-Achse stets $P_y(0|n)$.
Das hat folgenden Grund: Jeder Punkt auf der y-Achse hat die x-Koordinate $x = 0$. Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein, so erhält man: $y = m \cdot 0 + n \rightarrow y = n$.

Den **Schnittpunkt mit der x-Achse** kann man bestimmen, indem man den Graphen zeichnet und den Punkt abliest.

F1 Die Abb.6 zeigt die Graphen ***f***: $y = -2 \cdot x - 2$, ***g***: $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$ und ***h***: $y = -3 \cdot x + 3$. Lies aus der Abbildung der Graphen die Schnittpunkte mit den Achsen ab.

✍ ***f:*** $P_y(\,0\,|\,\dots\,)$, $P_x(\,\dots\,|\,0\,)$; ***g:*** ***h:***

Wären die Graphen zur Aufgabe **F1** nicht schon dargestellt, dann wäre diese Vorgehensweise recht aufwändig, da man erst die Graphen zeichnen müsste. Der Schnittpunkt mit der x-Achse lässt sich mit weniger Aufwand rechnerisch bestimmen. Das Prinzip ist folgendes: Wie du leicht sehen kannst, ist die y-Koordinate jedes Schnittpunktes mit der x-Achse stets $y = 0$. Es wird also ein Punkt auf der Geraden gesucht, für den $y = 0$ gilt. Also setzt man in der Funktionsgleichung für die Variable y den Wert 0 ein und löst die entstehende Gleichung. Der x-Wert, den man dann erhält, heißt ***Nullstelle*** (***x_0***) der Funktion.

Beispiel, Funktion ***h*** aus Übung F1:

$$0 = -3 \cdot x_0 + 3 \quad |-3$$
$$-3 = -3 \cdot x_0 \quad |:(-3)$$
$$1 = x_0$$

$\rightarrow$ Die Nullstelle der Funktion ***h*** ist $x_0 = 1$.
Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $P_x(1|0)$.

F2 Bestimme, wie im Beispiel, für die Funktionen ***f*** und ***g*** aus Übung **F1** die Schnittpunkte mit der x-Achse rechnerisch.

F3 Berechne die Nullstellen (**x_0**) der folgenden Funktionen:

f_1: $y = 5 \cdot x + 32$ ***f_2***: $y = -12 \cdot x + 18$ ***f_3***: $y = -8 \cdot x - 25$ ***f_4***: $y = \frac{3}{4} \cdot x - 4$.

F4 Gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen für folgende Funktionen an:

g_1: $y = -\frac{2}{5} \cdot x + 8$ ***g_2***: $y = 0{,}75 \cdot x + 12{,}6$ $g_3(x) = -5 \cdot x - 48$.

F5 Eine Kerze ist 11 cm lang.
Zündet man sie an, so brennt sie pro Stunde um 1,8 cm ab.

- Gib eine Funktionsgleichung an, mit der dieser Vorgang beschrieben wird.
- Berechne, wann die Kerze vollständig abgebrannt ist.
- Stelle den Graphen der Funktion graphisch dar.

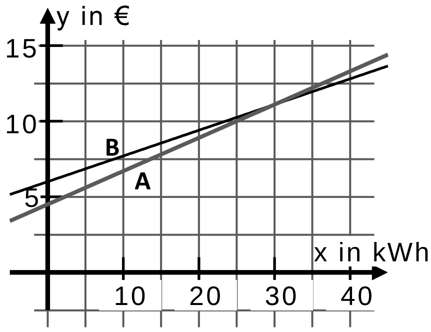
G Schnittpunkte zweier Graphen

Mitunter ist es notwendig, mit zwei oder mehr linearen Funktionen zu arbeiten.

Beispiel: Mario hat für seine neue Wohnung die Wahl zwischen zwei Stromanbietern:

Anbieter **A** verlangt eine monatliche Grundgebühr von 4,50 € und 0,22 € für jede verbrauchte kWh,

Anbieter **B** verlangt eine monatliche Grundgebühr von 6,00 € und 0,17 € für jede verbrauchte kWh.



Das Problem kann mit zwei linearen Funktionen beschrieben werden:

A: $y = 0{,}22 \cdot x + 4{,}5$ B: $y = 0{,}17 \cdot x + 6{,}0$

wobei y der Endpreis in € und x die verbrauchte Strommenge in kWh sind.
Aus der Darstellung kann man ablesen, dass ab einem Verbrauch von ca. 30 kWh der Anbieter B günstiger ist.

Wie auch in diesem Beispiel ist der Schnittpunkt der zwei Geraden oft von besonderer Bedeutung.

Geraden haben:
- **keinen** Schnittpunkt, wenn sie parallel zueinander sind,
- **genau einen** Schnittpunkt, wenn sie nicht parallel zueinander sind.[1)]

Ob zwei Geraden parallel zueinander sind, erkennt man am Anstieg m:

Gleicher Anstieg ($m_1 = m_2$) $\Leftrightarrow$ Geraden sind parallel.

Außerdem könnten zwei Graphen auch genau aufeinanderliegen, wenn ihre Funktionsgleichungen identisch sind. Das erkennt man bei genauem Hinsehen rasch, z.B: g_1: $y = 0{,}5 \cdot x + 1{,}2$

g_2: $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{6}{5}$.

1. Graphische Bestimmung von Schnittpunkten

Um den Schnittpunkt zu ermitteln, kann man die betreffenden Graphen einfach zeichnen und den Schnittpunkt ablesen.

In der nebenstehenden Abbildung (Abb.7) sind die Graphen von f_1: $y = 2 \cdot x - 5$ und f_2: $y = 0{,}5 \cdot x + 1$ dargestellt.

Ihr gemeinsamer Schnittpunkt ist der Punkt P(4|3).

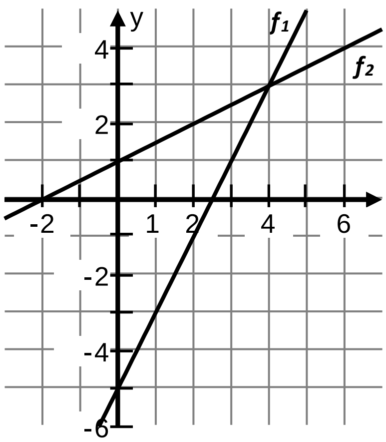


Abb.7: Zwei Graphen mit Schnittpunkt

Übung G1

Prüfe in den folgenden Aufgaben a) – e) ob die Geraden *parallel* oder *identisch* sind oder ob sie genau einen Schnittpunkt haben.

✍ Notiere Deine Erkenntnisse in der dafür vorgesehenen Zeile.

a) f_1: $y = -2 \cdot x + 3$
f_2: $y = -2 \cdot x - 3$

b) f_1: $y = 2 \cdot x + 3$
f_2: $y = -3 \cdot x + 8$

----

c) f_1: $y = 1{,}5 \cdot x + 2$
f_2: $y = \frac{3}{2} \cdot x - 1$

d) f_1: $y = 0{,}8 \cdot x + 3{,}5$
f_2: $y = \frac{4}{5} \cdot x + \frac{7}{2}$

e) f_1: $y = \frac{3}{4} \cdot x + 2$
f_2: $y = 2 \cdot x - 4$

Zeichne nun diejenigen Geradenpaare in je ein Koordinatensystem, die genau einen Schnittpunkt besitzen. Gib jeweils die Koordinaten der Schnittpunkte an.

[1)] gilt nur in der Ebene

2. Rechnerische Bestimmung von Schnittpunkten

Das zeichnerische (graphische) Bestimmen von Schnittpunkten ist ein einfacher Weg, diese Aufgabe zu lösen, aber wie auch schon im Themenblock F ist das Verfahren etwas umständlich. Außerdem gelingt das Ablesen nicht immer genau (siehe Aufgabe G1 e).

Auch hier gibt es ein Rechenverfahren. Die Grundidee ist folgende:

Der Schnittpunkt P(x|y) liegt auf beiden Graphen. Gesucht wird also eine Stelle, bei der beide Funktionen (f_1 und f_2) denselben Funktionswert y und dasselbe Argument x besitzen.

Man weiß also, dass $y_1 = y_2$ gelten muss. Da sich hinter y_1 die Funktionsgleichung von f_1 verbirgt und y_2 der Funktionsgleichung von f_2 entspricht, müssen an der gemeinsamen Stelle die Funktionsgleichungen denselben Wert liefern. Also setzt man sie gleich und löst die entstehende Gleichung.

Beispiel: $\boldsymbol{f_1}$: $y = 2\cdot x - 5$ und $\boldsymbol{f_2}$: $y = 0{,}5\cdot x + 1$

$$
\begin{aligned}
y &= y \\
2\cdot x - 5 &= 0{,}5\cdot x + 1 \quad &&|-0{,}5\cdot x + 5 \\
1{,}5\cdot x &= 6 \quad &&|:1{,}5 \\
\underline{\underline{x = 4}} & &&\text{Damit ist die x-Koordinate bekannt.}
\end{aligned}
$$

Die fehlende y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man, indem man die x-Koordinate in eine der Gleichungen einsetzt und ausrechnet.

$\boldsymbol{f_1}$: $y = 2\cdot 4 - 5 \rightarrow \underline{\underline{y = 3}}$.

Zur Probe setzt man x = 4 auch noch in die andere Funktionsgleichung ein, es muss der gleiche y-Wert heraus kommen.

$\boldsymbol{f_2}$: $y = 0{,}5\cdot 4 + 1 \rightarrow \underline{y = 3.}$

Der Schnittpunkt ist also P(4|3).

Das entspricht auch der graphischen Darstellung in Abb.7.

G2 Berechnung von Schnittpunkten

Prüfe ob die folgenden Funktionspaare jeweils genau einen Schnittpunkt besitzen und berechne ggf. dessen Koordinaten.

a) g_1: $y = 5\cdot x + 3$
g_2: $y = 2\cdot x + 9$

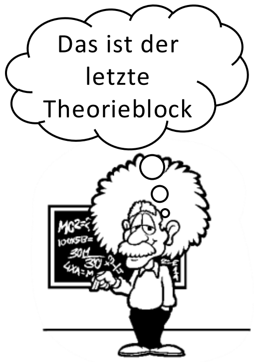
b) g_1: $y = -3\cdot x + 4$
g_2: $y = 2{,}5\cdot x - 18$

c) g_1: $y = 5\cdot x + 8$
g_2: $y = 12 + 5\cdot x$

d) g_1: $y = -7\cdot x - 13$
g_2: $y = -12\cdot x + 7$

e) g_1: $y = \frac{3}{8}\cdot x + \frac{9}{5}$
g_2: $y = 0{,}375\cdot x + 1{,}8$

H Aufstellen einer Funktionsgleichung



Mitunter sind zu einem Vorgang, der mit einer linearen Funktion beschrieben werden soll, nur eine Wertetabelle oder zwei Messwertpaare vorhanden. Gleichung und Graph sind noch zu ermitteln.
Um dieses Problem zu lösen, kann man wieder zuerst den graphischen Weg beschreiten. Man trägt die Punkte in ein Koordinatensystem ein und zeichnet die passende Gerade hindurch. Dann geht es weiter wie im Block **E**, Kapitel **1**: Steigungsdreieck zeichnen, m bestimmen, n ablesen, … .

Übung H1: Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte A(2|5) und B(6|-1).
- ◦ Zeichne die Punkte A und B in ein Koordinatensystem.
- ◦ Zeichne den Graphen von f und bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.
- ◦ An welcher Stelle schneidet der Graph von f die x-Achse?

Wie auch in den Themenblöcken F und G ist dieses Vorgehen etwas umständlich. Doch es ist die Grundlage für ein rechnerisches Vorgehen.
Um die Funktionsgleichung ohne Zeichnung zu ermitteln, stellt man sich das Steigungsdreieck vor.
Δy ist die Differenz aus den y-Koordinaten der gegebenen Punkte, Δx ist die Differenz aus deren x-Koordinaten.

z.B.: Vorgegeben sind die Punkte $P_1(4|7)$ und $P_2(2|4)$.
Gesucht ist die Gleichung der Geraden.
$\Delta y = y_1 - y_2 = 7 - 4 = 3$
$\Delta x = x_1 - x_2 = 4 - 2 = 2$
Daraus ergibt sich $m = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Immer gilt:

Sind $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ Punkte, die zu einer linearen Funktion f gehören, dann hat f den Anstieg $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

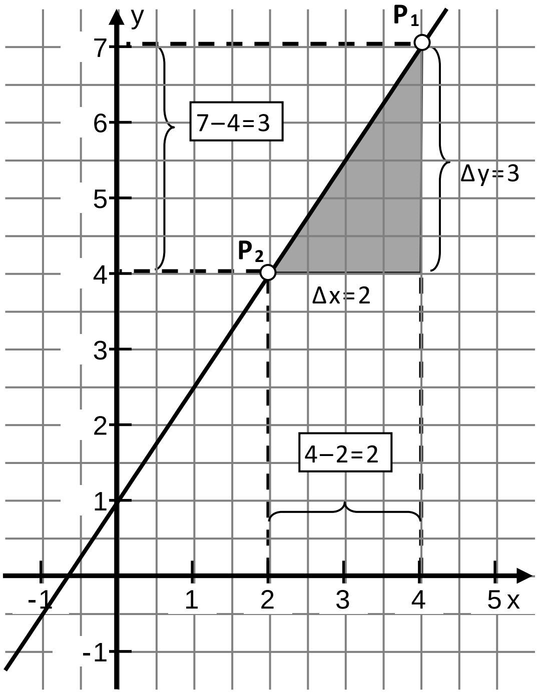


Abb.8: Steigungsdreieck

Wenn **m** bestimmt ist, lässt sich Parameter **n** durch Aufstellen einer Gleichung berechnen.
Da es um lineare Funktionen geht, muss die Funktionsgleichung folgende Struktur haben:
y = m·x + n. In diese Struktur setzen wir den Wert für **m** ein und die Koordinaten eines Punktes (welcher, ist egal).

Mit den Werten unseres Beispiels (m = 1,5) ergibt sich:
- wenn man die Koordinaten von P_1 nutzt: $7 = 1{,}5 \cdot 4 + n \rightarrow 7 = 6 + n \rightarrow n = 1$
- wenn man die Koordinaten von P_2 nutzt: $4 = 1{,}5 \cdot 2 + n \rightarrow 4 = 3 + n \rightarrow n = 1$

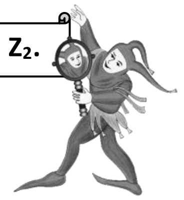
Also lautet die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $P_1(4|7)$ und $P_2(2|4)$ verläuft
y = 1,5·x + 1.

Übung H2: Bestimme rechnerisch die Gleichungen der linearen Funktionen, die jeweils durch die vorgegebenen Punkte verlaufen.

a) $P_1(4\|7)$, $P_2(2\|1)$	**b)** A(2|4), B(6|2)	**c)** P(4|−3), Q(8|0)	**d)** A(−6|3), B(3|−3)
e) P(22|90), Q(34|138)	**f)** $P_1(4\|-2)$, $P_2(-4\|10)$	**g)** A(−4|10), B(4|−2)	**h)** $P_x(5\|0)$, $P_y(0\|-3)$

Ü Übungen

Noch mehr Übungen in **Z₂**.



Ü1 ◦ Zeichne ein Koordinatensystem folgender Größe: $-2 \le x \le 7$ und $-8 \le y \le 7$.

◦ Stelle die Graphen der Funktionen ***f***: $y = -2 \cdot x + 5$ und ***g***: $y = \frac{2}{5} \cdot x - 7$ in diesem Koordinatensystem dar.

◦ Lies den Schnittpunkt S der Graphen von f und g ab.

◦ Gib für beide Graphen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

Ü2 Berechne die Nullstellen der folgenden drei Funktionen: ***f₁***: $y = 4 \cdot x - 14$,

f₂: $y = -\frac{3}{5} \cdot x + 9$, ***f₃***: $y = -0{,}4 \cdot x - 2$.

Ü3a) Bestimme zu den Graphen (g_1 - g_5) im Koordinatensystem die Funktionsgleichungen!

b) Lies die Nullstelle von f_6 im Koordinatensystem ab!

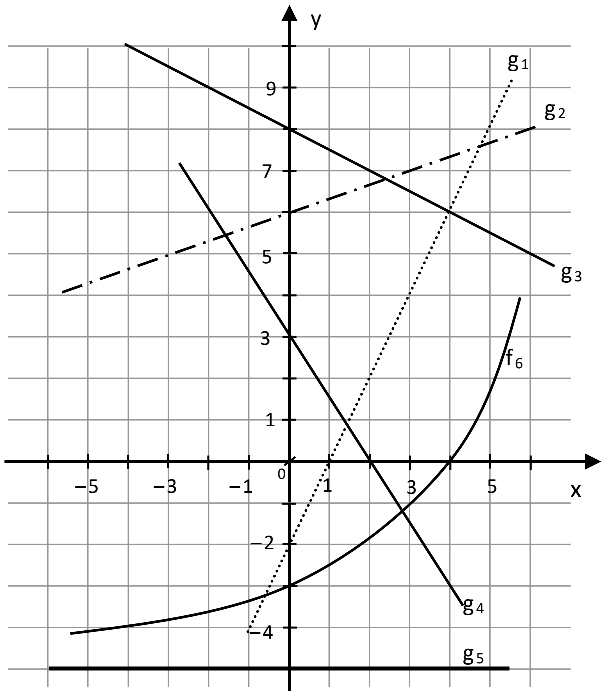


Abb.9: Graphen zu **Ü3**

Ü4 Gegeben sind die folgenden Funktionen:

h₁: $y = 2 \cdot x - 6$ ***h₂***: $y = -0{,}1 \cdot x + 18$

h₃: $y = 34 \cdot x + 251{,}6$ ***h₄***: $y = 6$

h₅: $y = -2{,}3 \cdot x - 34{,}5$.

Beschreibe den Verlauf der Graphen durch folgende Angaben:

◦ Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
◦ Steigungsverhalten (auch Monotonie genannt),
◦ Verlauf der Graphen durch die Quadranten, links beginnend.

Ü5 Bestimme jeweils die gemeinsamen Punkte der drei Paare von Funktionen.

a) ***f₁***: $y = 5 \cdot x - 18$
f₂: $y = -2 \cdot x + 3$

b) ***f₁***: $y = \frac{5}{6} \cdot x + 2$
f₂: $y = \frac{1}{3} \cdot x - 4$

c) $f_1(x) = 3 \cdot x - 2$
$f_2(x) = 3 \cdot x + 2$.

Ü6 In den folgenden Teilaufgaben sind Angaben zu jeweils einer linearen Funktion gemacht. Stelle aus diesen Angaben die Funktionsgleichungen auf.

a) Der Graph schneidet die y-Achse in P(0|5) und hat den Anstieg m = 1,4.

b) Die Punkte A(0|3) und B(4|1) liegen auf dem Graphen.

c) Die folgenden Wertepaare gehören zu der Funktion:

x	–2	6
y	1	7

d) Der Graph schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten C(5|0) und D(0|–4)

e) Der Graph verläuft durch die Punkte Q(–4|–9) und R(–1|–4,5).

f) Der Graph verläuft durch die Punkte S(–34|58) und T(12|–57). Berechne zu dieser Funktion auch die Nullstelle.

S Sachaufgaben

S1 Eine Kerze brennt in der Zeit (t) von einer Stunde um 0,4 cm herunter. Ihr Brennverhalten kann mit der Funktionsgleichung $\ell = 24 - \frac{2}{5}t$ beschrieben werden.

a) Erläutere die Funktionsgleichung.

b) Wie lang ist die Kerze nach 15 Stunden Brenndauer?

c) Nach welcher Zeit ist sie bis auf 10 cm heruntergebrannt?

d) Wann ist die Kerze ganz abgebrannt?

e) Überprüfe deine Ergebnisse an Hand einer graphischen Darstellung!

S2 LB. S. 94, Nr. 3 **S3** LB., S. 94, Nr. 4

S4 Die derzeitigen Benzinpreise sind für viele Familien ein Grund zur Besorgnis. So mancher Euro, für den man auch anderes hätte kaufen können, landet in der Tankstellenkasse.

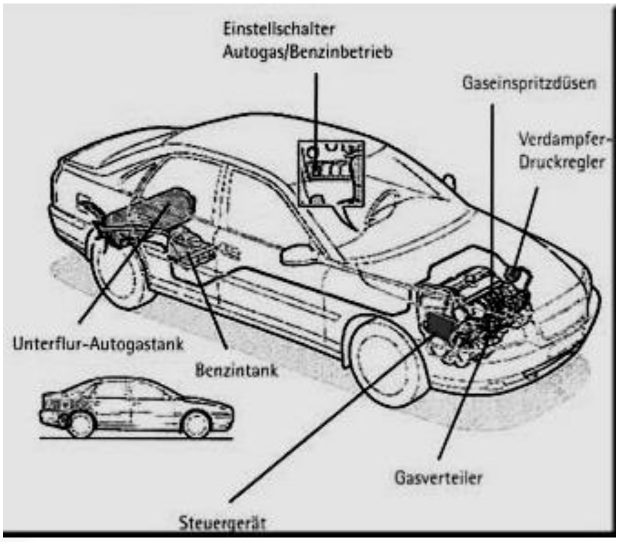
Eine Alternative scheint Autogas (LPG). Doch um es nutzen zu können, muss zuerst eine entsprechende Anlage eingebaut werden und die kostet erst mal.

Lohnt sich der Einbau?

Eine Familie hat einen Pkw „Golf“. Dieser verbraucht 7 Liter Super je 100 km. Nach Einbau einer Autogasanlage würde er 8 Liter Autogas je 100 km verbrauchen.

Zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben musst du Angaben aus den Abbildungen entnehmen.

- Stelle Funktionsgleichungen auf, die die Ausgaben für Treibstoff in Abhängigkeit von der Kilometerzahl darstellen. Berücksichtige dabei die Einbaukosten für die Gasanlage.
- Stelle die zwei Graphen so dar, dass ersichtlich wird, ab wann sich der Einbau lohnt.
- Ermittle rechnerisch, ab wie viel Kilometern sich der Einbau einer Gasanlage lohnt.



GAS AUTO ASSMANN

Finanzierungsangebot

Ware:	Autogas-Anlage Auto Assmann
Typ:	Prins VSI Holland
Merkmale:	4 Zylinder
Kaufpreis:	2.200,00 EUR

Abb. 10: Autogasanlage, Tankstellenpreise, Finanzierungsangebot

S5 Marlene will sich ein neues Handy zulegen. Sie hat die Wahl zwischen den Anbietern A, B und C:

	Grundpreis	€ pro min.
A (greenline)	10,- €	0,09
B (Talk-Talk)	22,- €	0,065
C (TeleMobil)	0,- €	0,19

a) Aus alten Telefonrechnungen hat sie eine durchschnittliche monatliche Gesprächsdauer von ca. 120 Minuten ermittelt. Welcher Anbieter ist für sie günstig?

b) Manche reden viel, andere wenig. Erstelle eine graphische Darstellung, die den monatlichen Preis in Abhängigkeit von der Gesprächsdauer für die drei Anbieter veranschaulicht. Beschränke dich dabei auf eine Gesprächsdauer von maximal zehn Stunden.

c) Gib an Hand dieser Darstellung an, bis zu welcher Gesprächszeit welcher Tarif am günstigsten ist.

d) Berechne diese Zeiten und die dazugehörigen Preise.

X_1 Erweiterungsthema: Koordinatengeometrie

Mit Hilfe linearer Funktionen lassen sich auch geometrische Objekte beschreiben.

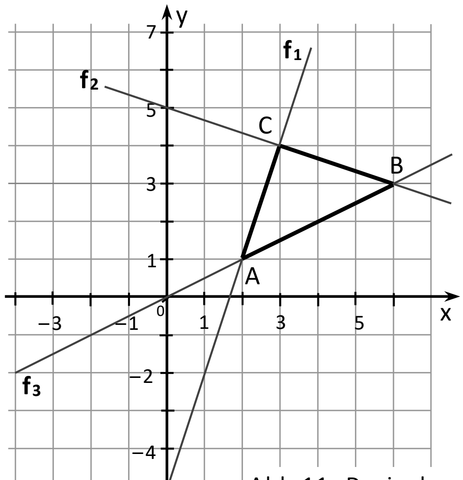


Abb.11: Dreieck

Bsp.1: Die Eckpunkte eines Dreiecks ABC (siehe Abb.11) sind die Schnittpunkte von 3 Funktionsgraphen.

f_1: $y = 3x - 5$, f_2: $y = -\frac{1}{3}x + 5$, f_3: $y = 0{,}5x$

- Es scheint rechtwinklig zu sein. Lässt sich das beweisen?
- Um Flächeninhalt und Umfang ermitteln zu können, müsste man die Länge der Seiten bzw. den Abstand der Eckpunkte voneinander berechnen.

I. Abstand zweier Punkte

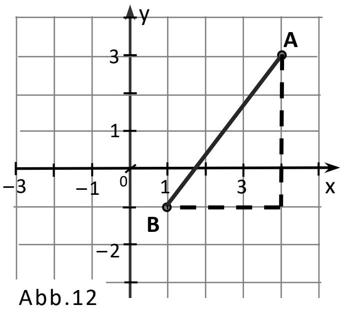


Abb.12

Den Punktabstand $d(\overline{AB})$ berechnet man mit dem *Satz des Pythagoras*. Man „denkt" sich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten Δx und Δy sind.

$\rightarrow$ $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

Bsp.2: (siehe Abb.12)

$\Delta x = 4-1 = 3$

$\Delta y = 3-(-1) = 4$

$d^2 = 3^2+4^2$ $\rightarrow$ $\underline{d = 5\ E}$

Übung X_1.1: Bestimme den Abstand der jeweiligen Punkte A und B!

a) A(1|3), B(9|9) **b**) A(−4|−3), B(2|5) **c**) A(−12|−23), B(−16|−20) **d**) A(-1|2), B(1|−4)

II. Orthogonalität von Geraden (orthogonal = rechtwinklig)

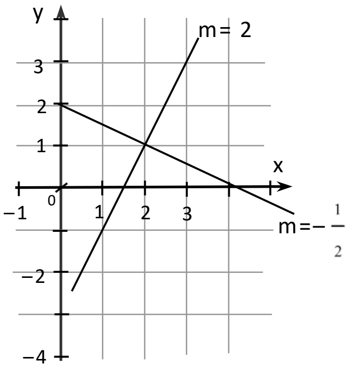


Abb.13: **Bsp.4**, zwei rechtwinklige Geraden

Der rechte Winkel ist in der Geometrie oft wichtig. Mit Hilfe linearer Funktionen lässt sich Orthogonalität leicht prüfen.
Die Graphen von 2 linearen Funktionen sind genau dann orthogonal, wenn gilt: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

(Kehrwert mit entgegengesetztem Vorzeichen)

Bsp.3:

f_1: $y = -4x + 6$ $\rightarrow m_1 = -4$

f_2: $y = 0{,}25x + 2$ $\rightarrow m_2 = \frac{1}{4}$

$\Big\}$ $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, also rechtwinklig.

Übungen:

X_1.2 Zeichne die Graphen von f_1 und f_2 aus **Bsp.3** und prüfe die Rechtwinkligkeit am Bild.

X_1.3 Begründe, warum das Dreieck aus **Bsp.1** rechtwinklig sein muss.

X_1.4 m_1 und m_2 seien die Anstiege von Geradenpaaren, die jeweils zueinander orthogonal sind.
✍ Vervollständige dementsprechend die Tabelle!

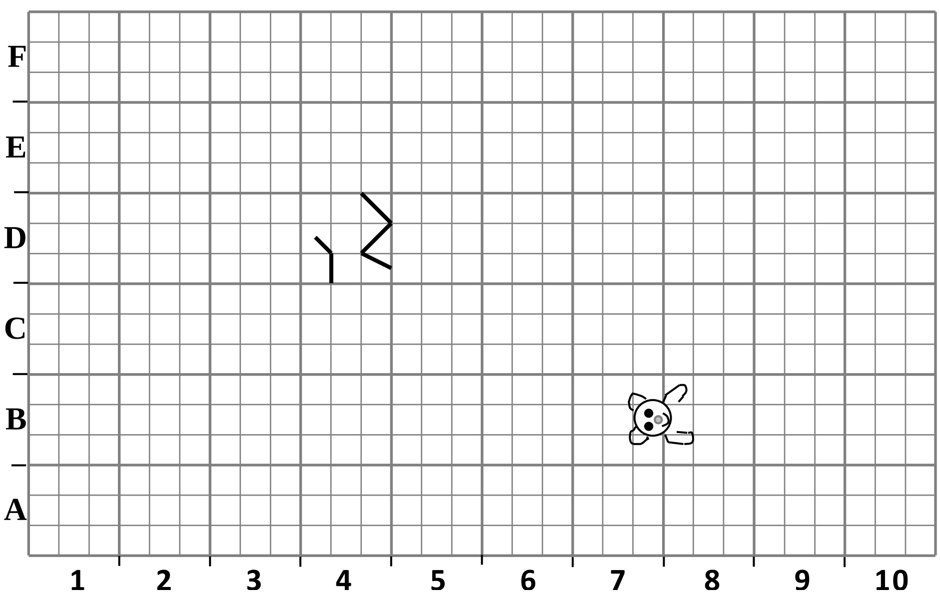
m_1	4	−4	$\frac{4}{7}$			
m_2				-0,2	$\frac{1}{10}$	0,75

X_1.5 Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte aus **Bsp.1** rechnerisch.
Berechne Umfang und Flächeninhalt des Dreieckes ABC!

Z_1 Zusatzübung: Gleichungen lösen

Um dieses Gitternetzpuzzle zusammenfügen zu können, musst du zuerst die Lösung der Gleichungen finden. Diese und die zugehörigen Buchstaben geben an, wohin du die Linien in das große Gitternetz übertragen sollst. ✎ Zeichne so genau wie möglich! Viel Spaß!

D - 4	C -	B -	C -	C -	E -
$2x + 3 = 15 - x$	$13x - 12 = 1$	$4x + 12 = 6x$	$8 - 2x = x - 7$	$4x + 2 = 2x + 14$	$x + 1 = 2$
D -	A -	B -	E -	C -	B -
$11x + 4 = 17x - 8$	$8 - 2x = x - 22$	$2 \cdot (x - 1) = 6$	$7x + 1 = 6x + 6$	$2x - 16 = 0$	$7x + 7 = 8x$
E -	C -	F -	A -	D -	A -
$5 - x = 2x - 4$	$14x + 1 = 41 - 6x$	$2x + 8 = 3x - 2$	$x \cdot x = 25$	$15 - x = x - 1$	$\sqrt{x} = 3$
A -	E -	C -	F -	A -	B -
$3x - 4 = 2x + 3$	$x + 1 = 21 - x$	$x - 2 = \frac{1}{2} x$	$11x - 1 = 8x + 17$	$x + 7 = 4x - 5$	$5x = 4x + 5$
E -	F -	D -	A -	D -	F -
$x - 6 = 2x - 12$	$9 - 8x = -1 - 6x$	$x+x+x+1 = 4$	$x + x = x + 8$	$3x - 2 = 2x + 3$	$7x + x = 6x + 18$
D -	A -	B -	D -	E -	C -
$x + 2 = 2x - 1$	$4x - 2 = 3x + 4$	$2x - 2 = x + 8$	$x:3 + 6 = 9$	$9x + 3 = 4x + 23$	$0{,}5x - 5 = 0$
F -	E -	D -	C -	B -	D -
$3x + 4 = 5x - 4$	$12 - x = x - 4$	$x \cdot x - 1 = 99$	$9x - 7 = 6x + 2$	$9 - 2x = 2x - 3$	$2 - x = 2x - 19$
C -	B -	D -	E -	E -	F -
$13 - x = x - 1$	$2x - 7 = x + 1$	$6x - 5 = 5x + 1$	$7x - 40 = x + 2$	$9 - x = 2x - 18$	$x + 3 = 2x - 4$



Z_2 Zusätzliche Grundübungen

Z_2.1 Gegeben ist die lineare Funktion ***f***: $y = 0{,}75 \cdot x - 3$.

a) Verläuft der Graph von ***f*** steigend oder fallend? Begründe.

b) Gib die Gleichung einer Funktion an, die parallel zu ***f*** verläuft.

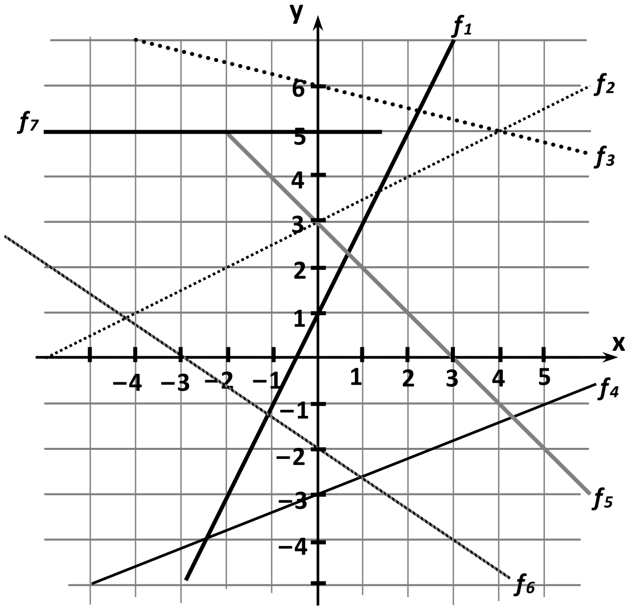
c) Prüfe, ob die Punkte A(24|15) und B(–24|–15) auf dem Graphen von ***f*** liegen.

d) Der Graph von ***f*** schneidet die Koordinatenachsen in zwei Punkten. Gib diese an.

e) Zeichne den Graphen von ***f***.

f) Die Koordinatenachsen und der Graph von ***f*** schließen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Berechne dessen Flächeninhalt und dessen Umfang.

Z_2.2 Bestimme die Funktionsgleichungen der nebenstehend abgebildeten Graphen $f_1 - f_7$.



Z_2.3 Gegeben sind vier Funktionen:

g_1: $y = 3x - 6$, ***g_2***: $y = -\frac{1}{2}x + 3$,

g_3: $y = \frac{3}{4}x + 1{,}5$, ***g_4***: $y = -3$

a) Berechne die Nullstellen.

b) Zeichne die Graphen und prüfe daran Deine Rechnungen aus a).

Z_2.4 Bestimme aus den folgenden Angaben jeweils die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion.

a) Graph hat den Anstieg m = 3 und verläuft durch P(0|2).

b) Graph hat den Anstieg m = – 0,5 und verläuft durch P(0|4).

c) Der Graph ist parallel zur Geraden $y = 2x - 18$ und schneidet die y-Achse bei Q(0|3).

d) Graph hat den Anstieg m = 0,5 und verläuft durch P(4|6).

e) Graph hat den Anstieg m = –2 und verläuft durch Q(1|3).

f) Graph hat den Anstieg m = –1 und eine Nullstelle bei $x_0 = 4$.

g) Graph ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1.Quadranten und verläuft durch P(2|–1).

h) Graph verläuft durch die Punkte P(1|2) , Q(4|8).

i) Graph verläuft durch die Punkte A(4|–4) und B(1|2).

j) P_1(1|2) und P_2(4|–4) liegen auf dem Graphen.

k) Der Graph schneidet die x-Achse im Punkt P_x(2|0) und die y-Achse in P_y(0|–6).

l) Die lineare Funktion besitzt die Nullstelle $x_0 = -3$ und den y-Achsenabschnitt $y_0 = 9$.

m) Dieser Graph schneidet im Punkt (2|3) den Graphen von ***g***: $y = -3 \cdot x + 9$ rechtwinklig.

Z_2.5 Berechne jeweils den Schnittpunkt der gegebenen Funktionen!

a) ***f_1***: $y = 2x+1$; ***f_2***: $y = 4x-5$

b) ***f_1***: $y = -0{,}5x+2$; ***f_2***: $y = x+8$

c) ***g_1***: $y = 5$; ***g_2***: $y = \frac{2}{3}x+1$

d) ***f_1***: $y = 0{,}8x + 4$; ***f_2***: $y = \frac{4}{5}x - 1$

Z_3 Noch mehr zusätzliche Übungen

Z_3.6 **Komplexaufgabe**: Es wird das Lesen von Kapitel X_1.I) „Abstand zweier Punkte“ empfohlen.

Gegeben sind drei Funktionen: ***f₁***: $y = -1{,}5 \cdot x + 15$;

f_2 hat den Anstieg m = 2 und der Graph verläuft durch den Punkt P(14|8);

der Graph von f_3 verläuft parallel zur x-Achse durch den Punkt Q(0|12).

Die Schnittpunkte der 3 Funktionen bilden ein Dreieck.

a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte .

b) Zeichne die Graphen der Funktionen (1 Kästchen = 1 Einheit) im Bereich der Eckpunkte.

c) Berechne Umfang (Satz des Pythagoras für Berechnung der einzelnen Seiten nutzen!) und den Flächeninhalt des Dreieckes.

Z_3.7 **Komplexaufgabe:**

Gegeben sind vier Funktionen durch ihre Gleichungen:

h_1: $y = -\frac{2}{3}x + 8$, h_2: $y = -\frac{2}{3}x + 2$, h_3: $y = 2$, h_4: $y = -2$

◦ Zeichne die Graphen der vier Funktionen in ein Koordinatensystem (1 Kästchen = 1 Einheit).

Die vier Schnittpunkte der Graphen der vier Funktionen bilden ein Viereck.

a) Begründe anhand der Funktionsgleichungen, warum dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

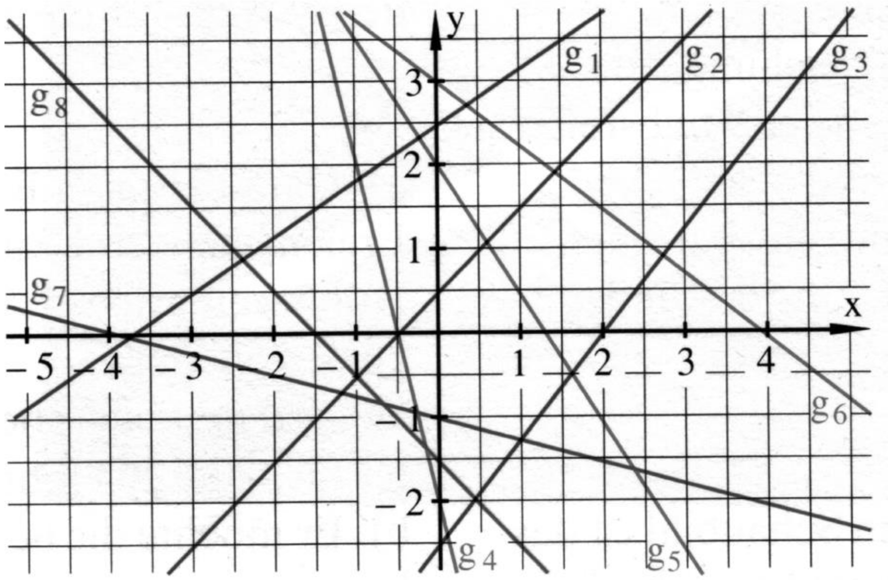
b) Berechne die Eckpunkte des Vierecks. Vergleiche mit der graphischen Darstellung!

Für **c**) und d)wird das Lesen von Kapitel X_1.I) „Abstand zweier Punkte“ empfohlen.

c) Zeige durch Rechnung, dass das Viereck kein Rhombus ist!

d) Berechne Umfang und Flächeninhalt des Viereckes!

Z_3.8 Gegeben sind acht Funktionen durch ihre Graphen g_1 - g_8 in der nebenstehenden Abbildung.



a) Gib zu jedem Graphen die passende Funktionsgleichung an.

b) Berechne die Nullstellen und vergleiche mit der Abbildung.

c) Berechne den Schnittpunkt der Graphen g_2 und g_8. Vergleiche mit der Abbildung.

d) Prüfe, ob der Punkt S(−18|16,5) ein gemeinsamer Punkt von g_6 und g_8 ist.

e) Welche Koordinaten müsste der Schnittpunkt von g_2 und g_3 haben.

HA_3 Beleghausaufgabe 3

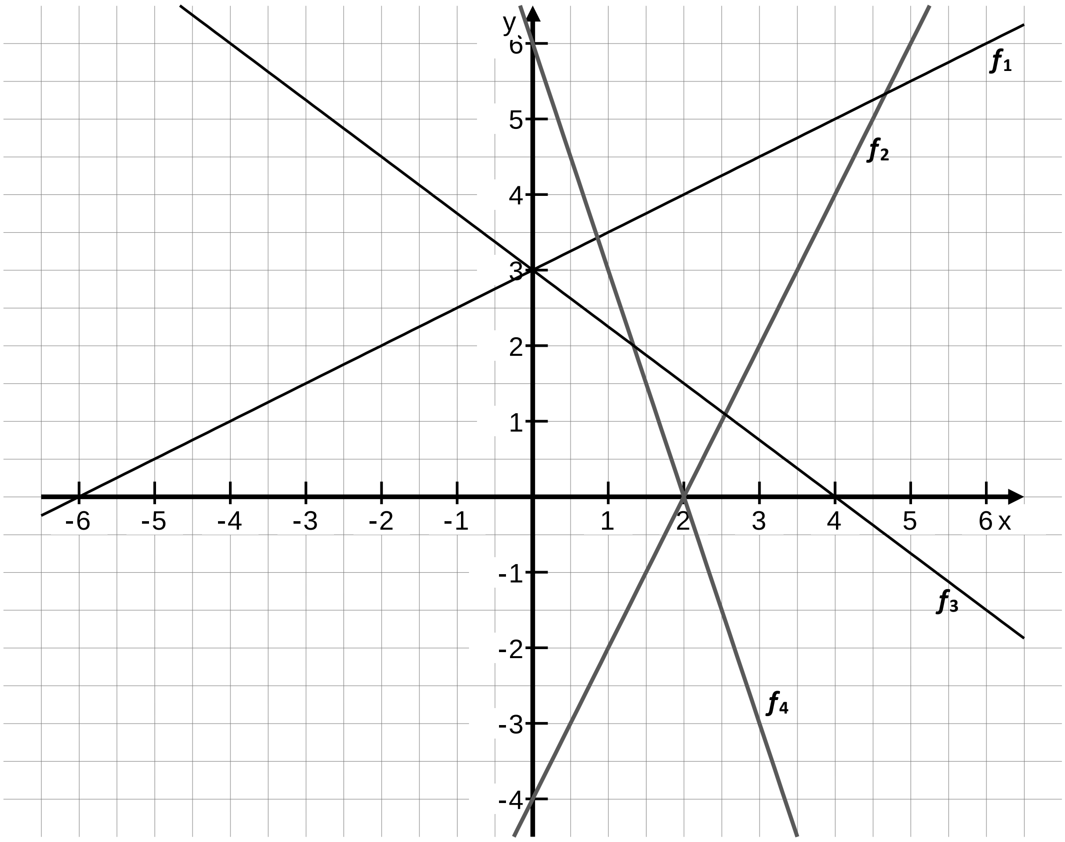
Abgabetermin: ______________________

Name: ______________________

1. Zeichne den Graphen der Funktion f : $y = 2{,}5\,x - 2$ und bestimme eine Funktionsgleichung, deren Graph zur gegebenen Gerade f parallel verläuft und

a) durch den Punkt P(0|4) geht;
b) den Punkt Q(3|3) enthält;
c) durch die Nullstelle $x_0 = -1$ geht;
d) durch den Koordinatenursprung geht.

2. Gib die Gleichungen der nachfolgend dargestellten Funktionen an.



3. In welchen 3 Punkten schneiden sich paarweise die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 ?

f_1: $y = x + 3$ f_2: $y = -1{,}5\,x + 8$ f_3: $y = \frac{1}{6}x - 2$

4. Ein Heizwerk verbraucht täglich 1,2 t Kohle. Seine maximale Lagerkapazität beträgt 60 t. Das Lager ist voll. Laut Betriebsvorschrift muss der Kohlevorrat ergänzt werden, wenn das Lager nur noch zu 20 % gefüllt ist.

a) Wie viel Tonnen Kohle befinden sich nach 30 Tagen noch im Lager?
b) Nach wie viel Tagen muss das Lager laut Vorschrift neu gefüllt werden?
c) Wann wäre das Lager leer?
d) Eine graphische Darstellung, die täglich den aktuellen Kohlevorrat zeigt, wäre für den Manager des Werkes sicher hilfreich. Fertige eine solche an. Markiere den kritischen Bereich, in dem die Sicherheitsvorschrift verletzt wäre. (Nutzung eines PC-Programmes ausdrücklich erlaubt.)

HA$_2$ Beleghausaufgabe 2

Abgabetermin: ______________________

Name: ______________________

1. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen mit Hilfe des Steigungsdreiecks in ein Koordinatensystem mit folgenden Vorgaben: 1 LE = 1 cm, $-2 \le x \le 8$, $-5 \le y \le 6$. Graphen bitte beschriften.

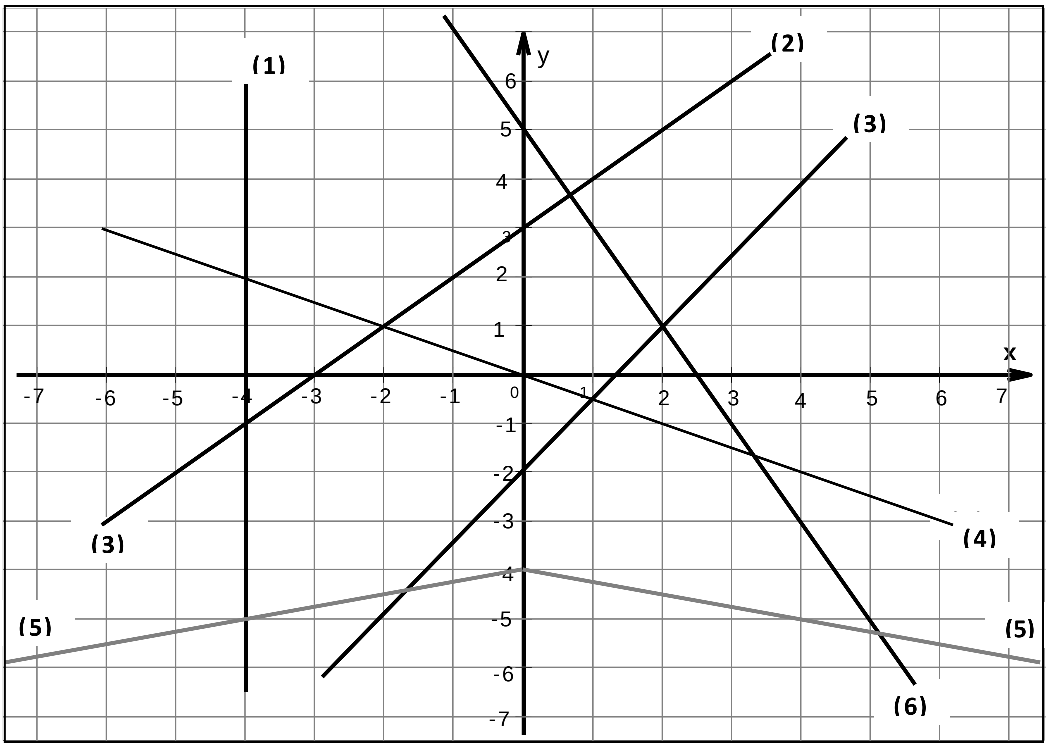
a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $y = -2{,}5x$ **c)** $y = 0{,}5x - 2{,}5$ **d)** $f(x) = -\frac{3}{5}x + 4{,}5$

2. In der untenstehenden Abbildung sind sechs Zuordnungen mit geraden Graphen abgebildet.

a) Welche Graphen sind keine linearen Funktionen? (Nr.: ✍...)
Begründung : ✍ ....
....

b) ✍ Fülle die Tabelle aus, für alle Geraden in der Abbildung, die **lineare** Funktionen darstellen.

Gerade-Nr.	Schnittpunkt mit der y-Achse	Anstieg m	Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + n$	Schnittpunkt mit der x-Achse



3. Vervollständige die nebenstehende Tabelle.

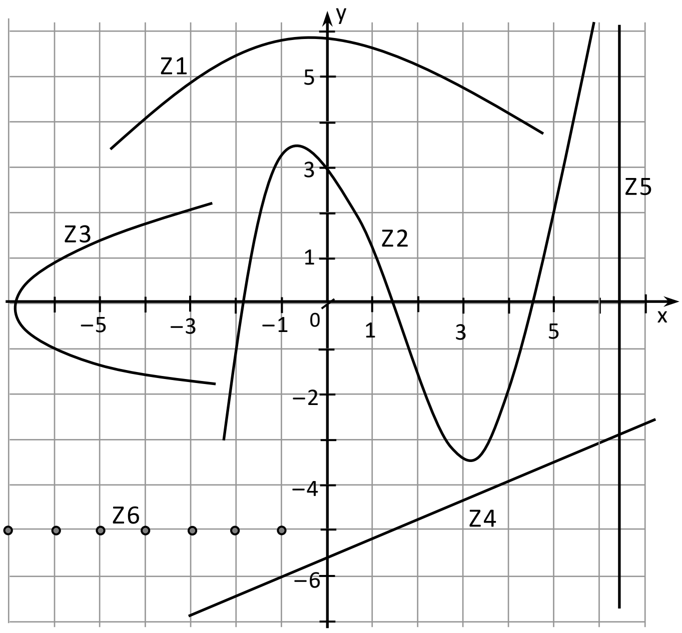
$P_1(x_1\|y_1)$	$P_2(x_2\|y_2)$	$x_2 - x_1$	$y_2 - y_1$	m	n	f(x)
$P_1(4\|1)$	$P_2(9\|3)$	5	2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$
$P_1(-3\|6)$	$P_2(2\|1)$					
$P_1(5\|2)$		4		3		
	$P_2(2\|4)$				3	

HA_1 Beleghausaufgabe 1

Abgabetermin: ______________________

Name: ______________________

1. Welche der graphisch dargestellten Zuordnungen sind Funktionen und welche nicht?
Begründe deine Antwort.



2. Lehrbuch, S. 83 / 1

3. Lehrbuch, S. 83 / 2

4. Zeichne mit dem *y-Achsenabschnitt* n = 2 je eine Gerade durch jeden der gegebenen Punkte.

Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung an.

a) A(2|1) **b)** C(6|−4) **d)** D(−1|6)