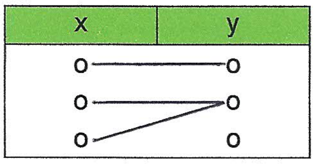
Lineare Funktionen

1.) Funktionen

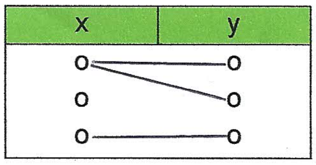
Was ist eine lineare Funktion?

Eine Funktion ist eine *eindeutige* **Zuordnung**.

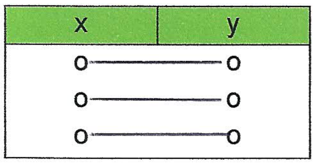
eindeutige Zuordnung



mehrdeutige Zuordnung



eineindeutige Zuordnung



x = Definitionsbereich → Elemente heißen Argumente oder auch x-Werte

y = Wertebereich → Elemente heißen Funktionswerte oder auch y-Werte

► Schreibweise

Definitionsbereich	Wertebereich
$D_f = \{ x \mid x \in Z \}$	$W_f = \{ y \mid y \in Z \}$
Definitionsbereich von f sind alle x-Werte für die gilt: x = Element der ganzen Zahlen	Der Wertebereich wird genauso wie der Definitionsbereich beschrieben, nur mit anderen Buchstaben.

2.) Lineare Funktionen

Die lineare Funktionsgleichung:

Funktionswert:

- Wert der ausgerechnet werden kann/soll

Argument:

- der Wert, für den man verschiedenen Zahlen einsetzen kann, um den dazugehörigen Funktionswert auszurechnen.

$$y = m \cdot x + n$$

Anstieg:

- der Faktor, der beschreibt, wie sich y verändert, wenn man x verändert

Absolutglied (y- Achsenabschnitt):

- der Wert, der schon vorhanden ist, wenn x noch x=0 ist (auch Anfangswert genannt)

Die Graphen linearer Funktionen sind stets Geraden.

Bedeutung der Parameter m und n

Die Parameter m und n sind *beliebige* aber *feste* Zahlen.

Parameter m:

Der Parameter m bestimmt, wie steil der Graph verläuft und ob er steigt oder fällt.
Deshalb nennt man den Faktor m auch Anstieg oder Steigung der Funktion.

Ein Graph, der in „Leserichtung" aufwärts verläuft, steigt.

Ein Graph, der in „Leserichtung" abwärts verläuft, fällt.

Bei linearen Funktionen gilt:

- wenn m > 0, dann **steigt** der Graph
- wenn m < 0, dann **fällt** der Graph
- je größer m, desto steiler verläuft der Graph

Wenn m = 0 ist, dann sähe die Funktionsgleichung so aus:
$y = m \cdot 0 + n$ bzw. $y = n$

Solche Funktionen sind keine linearen Funktionen, sondern *konstante Funktionen.*

Sie haben keinen Anstieg und verlaufen parallel zur x – Achse. (siehe Abb. 1)

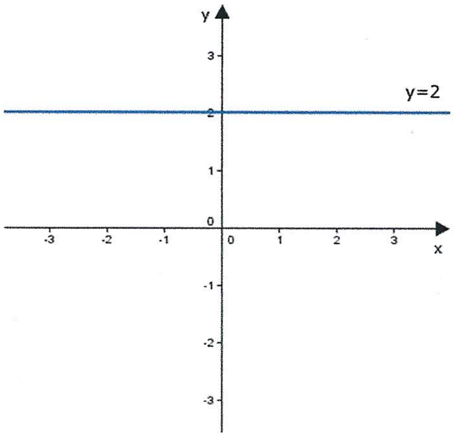


Abb. 1

Parameter n:

Der Parameter **n** bestimmt, an welcher Stelle die Gerade die y – Achse schneidet.
Es ist immer der Punkt (0|n). Deshalb nennt man den Summanden n auch **y – Achsenabschnitt**.

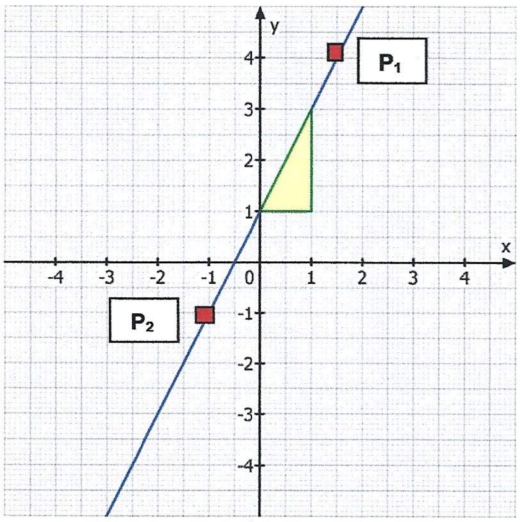
Das Steigungsdreieck

Um den Graph einer linearen Funktion zu zeichnen, braucht man nur 2 Punkte.
Einer der Punkte lässt sich sofort aus der Gleichung ablesen, der Punkt (0|n), der auf der y – Achse liegt.
Den anderen Punkt erhält man, indem man für x eine Zahl einsetzt und den dazugehörigen y – Wert mit der Gleichung berechnet.

Was ist, wenn der Graph vorhanden ist und die Gleichung ermittelt werden soll?

n = Schnittpunkt mit der y – Achse ablesen: **P_y (0|n)**
Anstieg m = wird mit *Steigungsdreieck* ermittelt

1. Bestimmen des Anstieges m mit dem Steigungsdreieck



- Man wählt zwei beliebige Punkte P_1 und P_2
- Zwischen diesen wird ein rechtwinkliges Dreieck aufgespannt, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen sind.
- Länge der Kathete in x – Richtung wird abgelesen. (hier: $\Delta x = 1$)
- Länge der Kathete in y – Richtung wird abgelesen. (hier: $\Delta y = 2$)
- Der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Anstieg m.

  (hier: $m = \frac{2}{1} = 2$)

Da der Schnittpunkt mit der y – Achse P (0|1) ist, steht auch n = 1 fest.

→ Also lautet die Gleichung zu diesem Graphen: **y = 2x + 1**

2. Zeichnen des Graphen mit dem Steigungsdreieck

- 1.Fall: Wenn m ganzzahlig ist, geht man ausgehend von n, eine Einheit nach rechts und m Einheiten nach : nach oben ► wenn m positiv
  nach unten ► wenn m negativ

- 2.Fall: Wenn m ein Bruch ist, also $m = \frac{p}{q}$, dann geht man ausgehend von n, q Einheiten nach rechts und p Einheiten nach:
  nach oben ► wenn m positiv
  nach unten ► wenn m negativ

- 3.Fall: Wenn m eine Dezimalzahl ist, so muss man diese in den entsprechenden Bruch umwandeln und verfahren wie in Fall 2.

Die Achsenschnittpunkte

rechnerisch bestimmen

- y - Koordinate bei Schnitt mit x – Achse: **y=0**
- Einsetzen für Variable y: **0** → lösen der entstandenen Gleichung
- x – Wert = Nullstelle (x_0)

Beispiel:

$y = -3x + 3$
$0 = -3x_0 + 3 \mid -3$
$-3 = -3x_0 \quad \mid :(-3)$
$1 = x_0$ → Die Nullstelle ist $x_0 = 1$
Der Schnittpunkt mit der x – Achse ist $P_x\,(1|0)$

Schnittpunkte zweier Graphen

Geraden haben:
- **keinen** Schnittpunkt, wenn sie parallel zueinander sind
- **genau einen** Schnittpunkt, wenn sie nicht parallel zueinander sind (gilt nur in der Ebene)

Ob zwei Geraden parallel zueinander sind, erkennt man am Anstieg m:

Gleicher Anstieg ($m_1 = m_2$) ↔ Geraden sind parallel

Außerdem können zwei Geraden auch genau aufeinanderliegen, wenn ihre Funktionsgleichungen **identisch** sind.
Das erkennt man recht schnell: z.B. g1: $y = 0{,}5x + 1{,}2$
G2: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$

Rechnerische Bestimmung von Schnittpunkten

- Schnittpunkt P(x|y) muss auf beiden Geraden liegen.
- gesucht: Stelle bei der beide Funktionen das gleiche Argument und den gleichen Funktionswert haben
- *Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst die entstandene Gleichung*

Beispiel: f_1: $y = 5x - 2$ und f_2: $y = 4x + 1$

$5x - 2 = 4x + 1 \quad \mid -4x$
$x - 2 = 1 \quad \mid +2$
$\underline{x = 3}$ Damit ist die x – Koordinate bekannt

Die fehlende y – Koordinate erhält man, indem man die x – Koordinate in die jeweilige Gleichung einsetzt.

f_1: $y = 5 \cdot 3 - 2$
$\underline{y = 13}$

f_2: $y = 4 \cdot 3 + 1$
$\underline{y = 13}$

Der Schnittpunkt ist also P(3|13).